

Analisi di Fourier (analisi armonica)

Premessa: una funzione sinusoidale, quale il seno o il coseno, è caratterizzata da alcuni parametri:

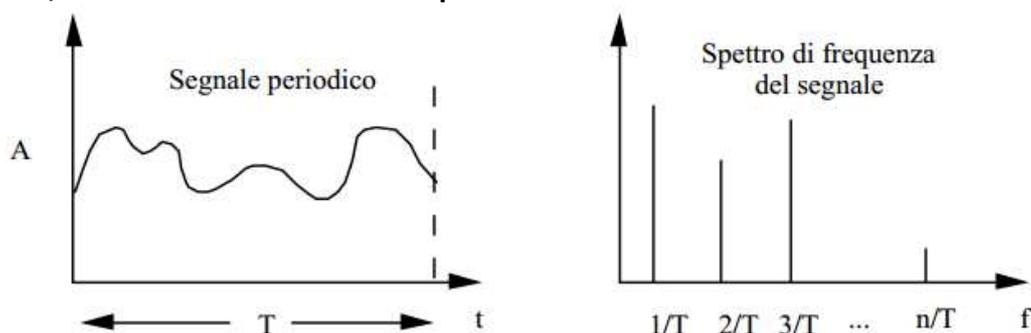
- ampiezza A la differenza fra il valore massimo ed il minimo;
- periodo T la quantità T di tempo trascorsa la quale la funzione si ripete;
- frequenza f l'inverso del periodo $f = 1/T$, misurata in cicli al secondo (Hz).

Fourier (matematico francese dell'800) dimostrò che una **funzione $g(t)$** , definita in un intervallo T , **può essere espressa come una somma di un numero infinito di funzioni sinusoidali**:

$$g(t) = \frac{1}{2} c \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen}(2\pi nft) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{cos}(2\pi nft)$$

dove $f = 1/T$ è la frequenza fondamentale ed a_n e b_n sono le ampiezze dell'ennesima armonica (o termine), che ha una frequenza n volte più grande della frequenza fondamentale.

Dunque, **un segnale variabile nel tempo è di fatto equivalente ad una somma di funzioni sinusoidali aventi ciascuna una propria ampiezza e frequenza. Si può quindi rappresentare un segnale $g(t)$ di durata T in un modo diverso, e cioè attraverso il suo spettro di frequenze, ossia attraverso la sua scomposizione in sinusoidi.**



Un segnale e il suo spettro di frequenze

Qualunque segnale è dunque caratterizzato da un intervallo di frequenze nel quale sono comprese le frequenze delle sinusoidi che lo descrivono. Esso va sotto il nome di banda di frequenza (frequency band) del segnale.

Diversi fattori influenzano le caratteristiche della banda:

- tanto più è breve la durata T del segnale, tanto più è alto il valore della frequenza fondamentale;
- tanto più velocemente nel tempo varia la $g(t)$, tanto più numerose sono le armoniche necessarie a descriverlo.

Anche i mezzi fisici sono caratterizzati da una banda di frequenze, detta banda passante. Essa rappresenta l'intervallo di frequenze che il mezzo fisico è in grado di trasmettere senza alterarle oltre certi limiti. Le alterazioni principali sono la attenuazione e l'introduzione di ritardo, che di norma variano al variare delle frequenze trasmesse.

A volte la dimensione della banda passante dipende dalle caratteristiche fisiche del mezzo trasmissivo, a volte deriva dalla presenza di opportuni filtri che tagliano le frequenze oltre una certa soglia (detta frequenza di taglio). Ad esempio, nelle linee telefoniche la banda passante è 3 kHz (da 0 Hz a 3.000 Hz), ottenuta con filtri passa-basso.

In generale, i mezzi trasmissivi:

- attenuano i segnali in proporzione alla distanza percorsa e alla frequenza del segnale;
- propagano i segnali a velocità proporzionali alle loro frequenze.

Una conseguenza è che, per qualunque mezzo trasmissivo, la banda passante si riduce all'aumentare della lunghezza del mezzo stesso.

Perché un segnale sia ricevuto come è stato trasmesso, è necessario che la banda passante sia uguale o più ampia della banda di frequenza del segnale stesso. Altrimenti, il segnale viene privato di alcune delle sue armoniche (tipicamente quelle di frequenza più elevata) e viene quindi distorto, cioè alterato. Se un numero sufficiente di armoniche arriva a destinazione, il segnale è comunque utilizzabile.

Ci sono due teoremi fondamentali che caratterizzano i limiti per la trasmissione delle informazioni.

Teorema di Nyquist

Nyquist (1924) ha dimostrato che un segnale analogico di banda h (da 0 ad h Hz) può essere completamente ricostruito mediante una campionatura effettuata $2h$ volte al secondo.

Dunque esso "convoglia" una quantità di informazione rappresentabile con un numero di bit pari a

$$2h \cdot (\text{logaritmo in base 2 del numero di possibili valori del segnale})$$

per ogni secondo.

Una conseguenza di tale teorema è che il massimo data rate (detto anche, con un termine non del tutto appropriato, velocità di trasmissione) di un canale di comunicazione dotato di una banda passante da 0 Hz ad h Hz (passa-basso di banda h) che trasporta un segnale consistente di V livelli discreti è:

$$\text{massimo data rate (bit/sec.)} = 2h \log_2 V$$

Questo risultato implica che un segnale binario non va oltre i 6 kbps su una linea di banda passante pari a 3 kHz. Come vedremo, i modem veloci sfruttano un segnale con un numero V di livelli piuttosto elevato per riuscire a trasmettere, su una linea funzionante ad x baud, più di x bit/sec. (il termine baud indicava velocità di segnalazione di una linea, ossia quante volte al secondo essa è in grado di cambiare valore).

Teorema di Shannon

Il teorema di Nyquist è valido per canali totalmente privi di disturbi (il che purtroppo non è realistico). Per gli altri casi vale il teorema di Shannon (1948), che considera le caratteristiche di un canale rumoroso.

Prima di esporre il teorema è necessario chiarire il concetto di rapporto segnale/rumore (signal to noise ratio, S/N):

esso è il rapporto fra la potenza del segnale e quella del rumore.

Si misura in decibel (dB), che crescono come $10 \log_{10}(S/N)$. La tabella seguente riporta alcuni valori esemplificativi.

Rapporto S/N	Misura in Db
2	3
10	10
100	20
1.000	30

Il teorema di Shannon afferma che il massimo data rate di un canale rumoroso, con banda passante di h Hz e rapporto segnale/rumore pari a S/N , è data da:

$$\text{massimo data rate (bit/sec.)} = h \lg_2(1 + S/N)$$

Si noti che in questo caso non conta più il numero V di livelli del segnale. Ciò perché, a causa del rumore, aumentarne il numero può renderli indistinguibili.

Ad esempio, su un canale con banda 3kHz e $S/N = 30\text{dB}$ (tipici di una normale linea telefonica) si può arrivare al massimo a 30.000 bps.

In generale:

- più alto è il numero di bit/secondo che si vogliono trasmettere, più ampia diviene la banda passante che serve (T diminuisce);
- a parità di mezzo utilizzato, tanto più è corto il canale di trasmissione tanto più è alto il numero di bit/secondo raggiungibile (attenuazioni e sfasamenti restano accettabili);
- la trasmissione digitale è più critica di quella analogica (genera frequenze più alte), ma può essere più facilmente "rigenerata" lungo il percorso (è sufficiente distinguere fra pochi valori per ripristinare il segnale originario; nella trasmissione analogica ogni amplificazione introduce distorsione, che si somma a quella degli stadi precedenti).